

Petr KONEČNÝ¹

PŘESNOST ODHADU PRAVDĚPODOBNOTI PORUCHY

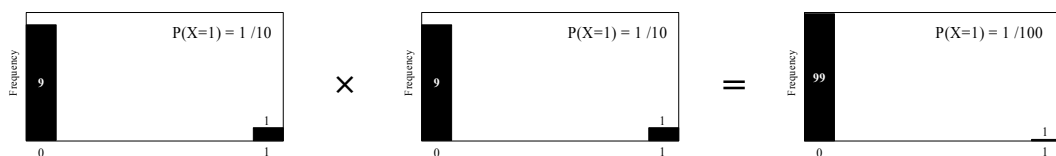
Abstrakt

Článek si klade za cíl ověřit počet simulací Monte Carlo nutných k dosažení dostatečně přesného odhadu pravděpodobnosti poruchy, veličiny nutné pro ověření inženýrské spolehlivosti stavebních konstrukcí aplikované např. v metodě SBRA [8]. V příspěvku je sledován vliv cílové pravděpodobnosti a vliv počtu histogramů na nutný počet simulací. Článek obsahuje doporučené hodnoty počtu simulačních kroků Monte Carlo.

Výsledky získané simulací Monte Carlo jsou porovnány s výsledky získanými numerickou integrací, a to za pomoci Přímého determinovaného pravděpodobnostního přístupu (PDPV) [4].

1 ÚVOD - PRAVDĚPODOBNOTI PORUCHY JAKO NÁHODNÁ VELIČINA

Analyzujeme-li inženýrskou spolehlivost simulačními nástroji typu Monte Carlo, které užívají pro odhad pravděpodobnosti poruchy generátory náhodných čísel, je nutné i na výslednou pravděpodobnost pohlížet jako na náhodnou veličinu (viz např. [15], [14], [3] a [13]). Což je možno ukázat za pomoci simulace na jednoduchém příkladě součinu dvou histogramů.



Obr. 1: Součin dvou histogramů $RF = X_1 \times X_2$

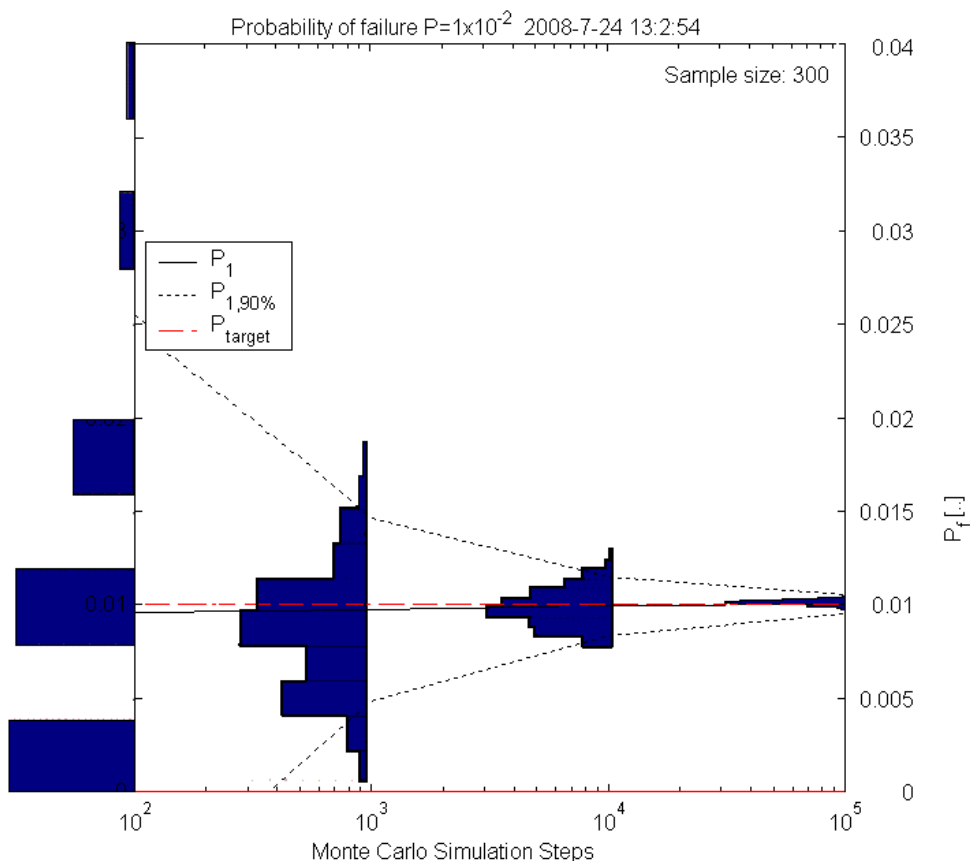
Pravděpodobnost výskytu hodnoty 1 ve výsledném součinu RF je rovna $1/100$ jak lze rovněž nahlédnout níže.

$$P(RF = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \quad (1)$$

Budeme-li hledat výsledné řešení metodou Monte Carlo, dostaneme přesný výsledek při počtu simulací blížících se nekonečnu. Následující graf na Obr. 2 zobrazuje rozdělení pravděpodobnosti poruchy v závislosti na počtu simulačních kroků. Pravděpodobnost poruchy pro každý z hledaných počtů simulací je vypočtena 300krát. Na základě souboru 300 hodnot je vytvořeno příslušné rozdělení pravděpodobnosti výskytu pravděpodobnosti poruchy. Je patrné, že tvar histogramu se blíží normálnímu rozdělení při více jak desetinásobku $1/P_f$ (od 1000 simulačních kroků). Na základě Gaussova rozdělení je možno určit konfidenční interval výskytu výsledků simulací – pravděpodobností poruchy. Výpočet konfidenčního intervalu bude následovat v další části.

Na grafu je vyznačena jak cílová pravděpodobnost $P_{\text{target}} = 0.01$, tak průměr získaných pravděpodobností P pro určitý počet simulací. Je zde rovněž zobrazen konfidenční interval do kterého by mělo padnout 90 procent odhadovaných pravděpodobností za předpokladu normality rozdělení. Jedná se tedy o vyznačení intervalu o tzv. 90–procentní úrovni spolehlivosti.

¹ Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875, Ostrava-Poruba, tel.: +420 597 321 384, e-mail: petr.konecny@vsb.cz.



Obr. 2: Pravděpodobnost poruchy P_f jako nahodile proměnná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo (exaktní pravděpodobnost poruchy $P_f = 1/100$)

1.1 Chyba odhadu pravděpodobnosti poruchy

Odhad nutného počtu simulací přímou metodou Monte Carlo je možno dle [15], [14] a [3] odvodit na základě předpokladu, že pravděpodobnost poruchy P_f je rovněž náhodná veličina o normálním rozdělení. Pro náhodnou veličinu P_f vypočtenou na základě souboru N simulací Monte Carlo lze stanovit konfidenční interval $[-\varepsilon; \varepsilon]$ (2) pro zvolené úrovně spolehlivosti odhadu vyjádřené parametrem t v závislosti na směrodatné odchylce souboru σ , viz [3]. Z následujícího vztahu vyplývá, že chyba odhadu pravděpodobnosti poruchy klesá u přímé metody Monte Carlo s \sqrt{N} . Schuller [14] uvádí, že tato chyba klesá nezávisle na dimenzi problému (počtu náhodných veličin).

$$[-\varepsilon; \varepsilon] = [-t\sigma; t\sigma] = \left[-t\sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}}; t\sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}} \right] \quad (2)$$

Parametr t popisuje velikost konfidenčního intervalu $[-\varepsilon; \varepsilon]$. Úroveň spolehlivosti odhadu pravděpodobnosti poruchy je možno upřesnit volbou parametru t , který je tabelizován v Tab. 1. Parametr lze také vypočíst z inverzní distribuční funkce normálního rozdělení:

$$t = \Phi^{-1}(1 - \delta/2) = \Phi^{-1}(1 - 0.1/2) = 1.64485 \text{ pro } 90\% \text{ úroveň spolehlivosti.} \quad (3)$$

Tab. 1: Konfidenční interval $t \times \sigma$ pro vybrané úrovně spolehlivosti

Úroveň spolehlivosti	$t \times \sigma$
0.800	$1.28155 \times \sigma$
0.900	$1.64485 \times \sigma$
0.950	$1.95996 \times \sigma$
0.990	$2.57583 \times \sigma$
0.995	$2.80706 \times \sigma$
0.999	$3.29053 \times \sigma$

Z výše uvedeného lze dovodit možný rozptyl výsledků simulace Monte Carlo, a to pro danou pravděpodobnost P_d a počet simulačních kroků N . Pro cílovou pravděpodobnost 7×10^{-5} , což je typická hodnota pro P_d u mezního stavu únosnosti, padne při 2 mil. simulačních kroků výsledná hodnota P_f s 90–procentní pravděpodobností do intervalu $7 \times 10^{-5} \pm 0.97 \times 10^{-5}$. Použije-li se jen 1 mil. simulací, pak by měl být výsledek v rozsahu $7 \times 10^{-5} \pm 1.4 \times 10^{-5}$.

1.2 Nutný počet simulačních kroků

Inverzí vztahu (2) lze získat nutný počet simulačních kroků N_n [14]:

$$N_n = P_f \left(1 - P_f \right) \left[\frac{t}{\varepsilon} \right]^2, \quad (4)$$

kde je

P_f hledaná pravděpodobnost,

t násobek směrodatné odchylky dle zvolené úrovně spolehlivosti (viz Tab. 1),

N_n nutný počet simulačních kroků.

Vztah (4) je založen na centrálním limitním teorému a předpokládá normální rozdělení hledané veličiny - pravděpodobnosti poruchy P_f . Podmínka je s akceptovatelnou chybou splněna, jak bylo ukázáno na Obr. 2. Dále předpokládá dostatečně velký počet simulačních kroků.

Počet nutných simulačních kroků uvádí (5). Uvážíme – li pro ilustraci cílovou pravděpodobnost $P = 1/100$ a toleranci ± 20 procent pro 90–procentní úroveň spolehlivosti ($\varepsilon = 0.2 \times 1/100$ a $t = 1.64485$) pak je nutný počet simulací:

$$N_n = \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100} \right) \left[\frac{1.64485}{\frac{0.2}{100}} \right]^2 = 6696. \quad (5)$$

Lze spočítat, že pro cílovou pravděpodobnost $P_f = 7 \times 10^{-5}$ a toleranci ± 20 procent ($\varepsilon = 1.4 \times 10^{-5}$) je pro 90–procentní spolehlivost potřeba 0.96 mil. simulací. Kdyby bylo zapotřebí 99–procentní jistoty, že P_f padne do vytčeného intervalu ($t = 2.57583$ viz Tab. 1), pak by bylo zapotřebí 2.37 mil. simulací. Tolerance ± 20 procent, které odpovídá konfidenční interval

$\varepsilon = \pm 1.4 \times 10^{-5}$, se jeví jako dostatečná při uvážení, že pravděpodobnost poruchy může u návrhů dle stávajících norem dramaticky kolísat, a to v rozsazích $1 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-6}$ (viz [9] a [6]).

2 NUMERICKÉ PŘÍKLADY – SOUČIN HISTOGRAMŮ

Úloha je pro jednoduchost formulována tak, aby bylo možno znát přesné řešení. Zvolené histogramy obsahují dvě třídy o známé četnosti (viz také demonstrační příklad na Obr. 1). Třidu o hodnotě 0 a třídu o hodnotě 1. Četnosti obou hodnot jsou vhodně zvoleny tak, aby pravděpodobnost výskytu hodnoty 1 byla např. $P = 1 \times 10^{-1}$ (viz Obr. 1). Součinem těchto histogramů je možno docílit výsledků o libovolné pravděpodobnosti výskytu hodnoty 1 ve výsledné funkci spolehlivosti RF . Pravděpodobnost $P = 1/100$ je možno určit součinem dvou nezávislých histogramů u kterých je pravděpodobnost výskytu hodnoty jedna rovna jedné desetinné. Obecně je možno úlohu zapsat následovně:

$$P = \overline{RF} = \frac{RF}{N} = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_j}{N}, \quad (6)$$

kde je:

\overline{RF} průměr funkce spolehlivosti RF ,
 j počet aplikovaných nezávislých histogramů,
 N počet simulací Monte Carlo.

2.1 Přímá metoda Monte Carlo

K pravděpodobnostní analýze metodou Monte Carlo je užito prostředí *Matlab* a simulačního nástroje jehož jádro vytvořil P. Praks, viz [11] a [12].

2.1.1. Pravděpodobnost poruchy $P = 1 \times 10^{-2}$

Pravděpodobnosti $P = 1/100$ lze vypočítat součinem dvou histogramů PF_2 , viz Obr. 1 a vztah (1) nebo výběrem pouze z jednoho histogramu PF_1 :

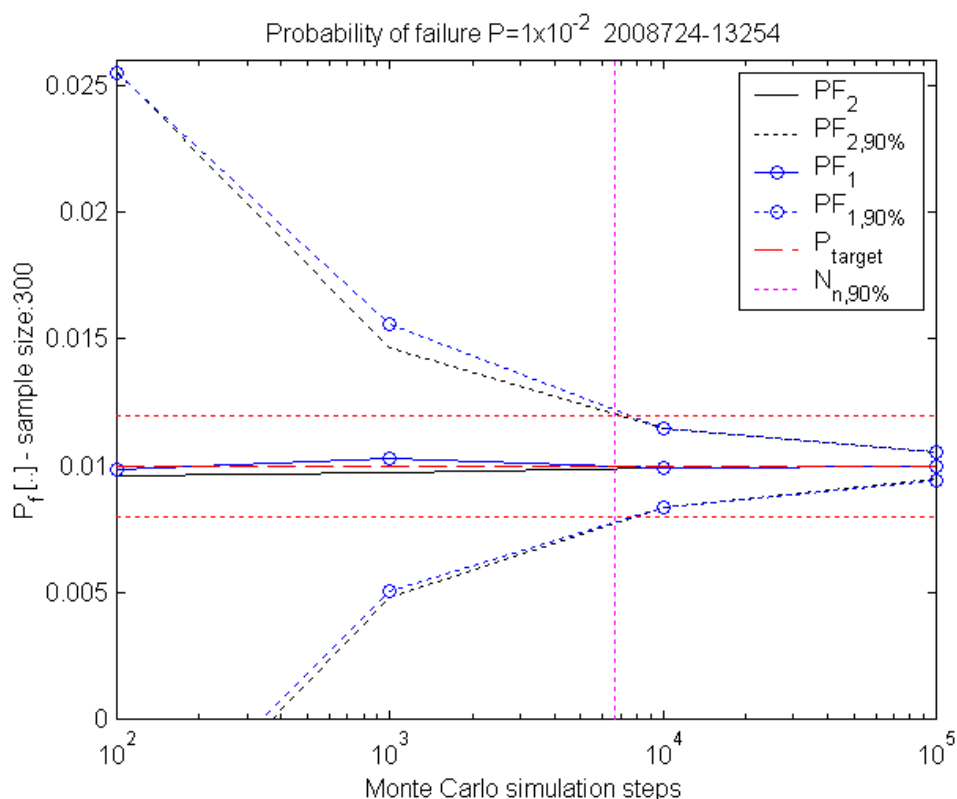
$$PF_2 = P(RF = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 10^{-2}, \quad (7)$$

$$PF_1 = P(RF = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{100} = 10^{-2}. \quad (8)$$

Uvážíme – li cílovou pravděpodobnost $P = 1/100$, a toleranci ± 20 procent pro 90–procentní úroveň spolehlivosti, pak je možno určit vstupní parametry pro vztah (4) následovně: $P_f = 1/100$, $\varepsilon = 0.2 \times 1/100$, $t = 1.64485$ (90–procentní úroveň spolehlivosti) je nutný počet simulací 6696, jak je vypočteno (5).

Následující graf ukazuje závislost mezi počtem aplikovaných simulačních kroků a rozptylem odhadu pravděpodobnosti poruchy P_f . Odhad pravděpodobnosti poruchy je proveden s využitím simulačního nástroje Monte Carlo. Každá pravděpodobnost je odhadnuta pro zvolený počet simulačních kroků ($N = 10^2, 10^3, 10^5$) 300krát a následně statisticky vyhodnocena. Mezilehlé hodnoty jsou proloženy přímkou. Graf obsahuje průměrnou hodnotu a také hranice konfidenčního intervalu.

Z výsledků simulace vyplývá, že k dosažení požadované přesnosti simulace postačí zhruba 6700 simulací, což odpovídá odhadu dle (5). Při 6700 simulačních krocích dochází ke zúžení konfidenčního intervalu pod předepsanou toleranci. Pro odhad pravděpodobnosti v řádu jednoho procenta tedy postačí méně než 10000 simulací. Rozdíl mezi výsledkem získaným aplikací jednoho a dvou histogramů je prakticky zanedbatelný.



Obr. 3: Pravděpodobnost poruchy P_f jako nahodile proměnná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_f = 1/100$. (PF_2 – 2 histogramy, PF_1 – 1 histogram)

2.1.2 Pravděpodobnost poruchy $P = 1 \times 10^{-3}$ a $P = 1 \times 10^{-4}$

Pravděpodobnost $P = 1 \times 10^{-3}$ (viz Obr. 4) je ověřena s využitím jednoho až tří histogramů:

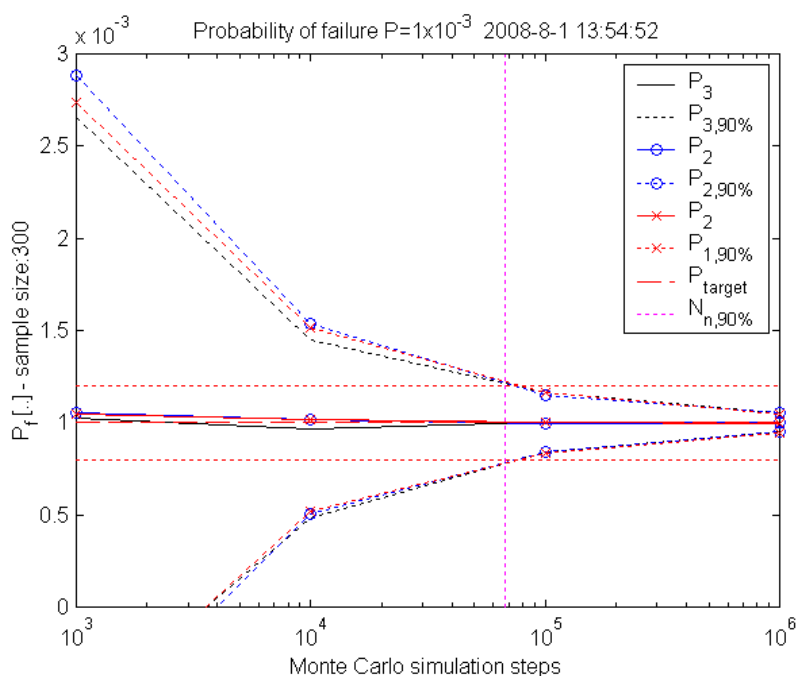
$$PF_3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = PF_2 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = PF_1 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}. \quad (9)$$

K výpočtu pravděpodobnosti poruchy přímou metodou Monte Carlo je potřeba alespoň 67571 simulačních kroků.

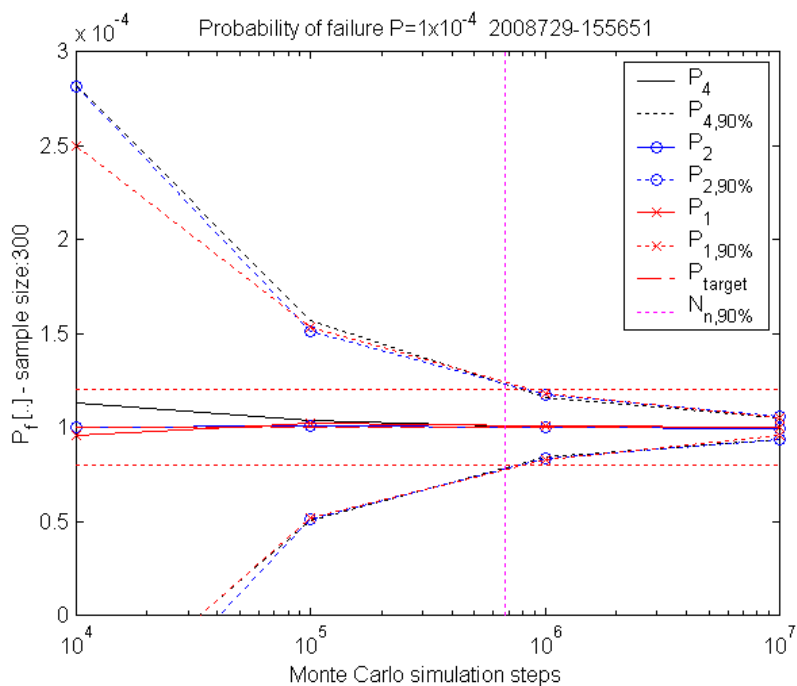
Pravděpodobnost $P = 1 \times 10^{-4}$ řádově odpovídá hodnotě aplikované pro mezní stavy únosnosti ($P_d = 0.7 \times 10^{-4}$), a je odhadnuta jedním, dvěma a čtyřmi histogramy. Je vhodné aplikovat minimálně 676315 simulačních kroků:

$$PF_4 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = PF_2 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = PF_1 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}. \quad (10)$$

Obr. 4 a Obr. 5 zobrazují závislosti mezi počtem aplikovaných simulačních kroků a rozptylem očekávaných výsledku. Z grafů vyplývá, že pro odhad pravděpodobnosti poruchy u zvolených úloh nezáleží na počtu užitých histogramů.



Obr. 4: Pravděpodobnost poruchy P_f jako nahodile proměnná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_f = 10^{-3}$. ($PF_3 - 3$ histogramy, $PF_2 - 2$ histogramy, $PF_1 - 1$ histogram)



Obr. 5: Pravděpodobnost poruchy P_f jako nahodile proměnná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_f = 10^{-4}$. ($PF_4 - 4$ histogramy, $PF_2 - 2$ histogramy, $PF_1 - 1$ histogram)

2.1.4 Pravděpodobnost poruchy $P = 1 \times 10^{-5}$

Pravděpodobnost $P = 1 \times 10^{-5}$ a je odhadnuta dvěma, třemi a pěti histogramy, viz (11)-(13). Pro dostatečně přesný odhad je zapotřebí cca. 6,8 mil. simulací, viz (14).

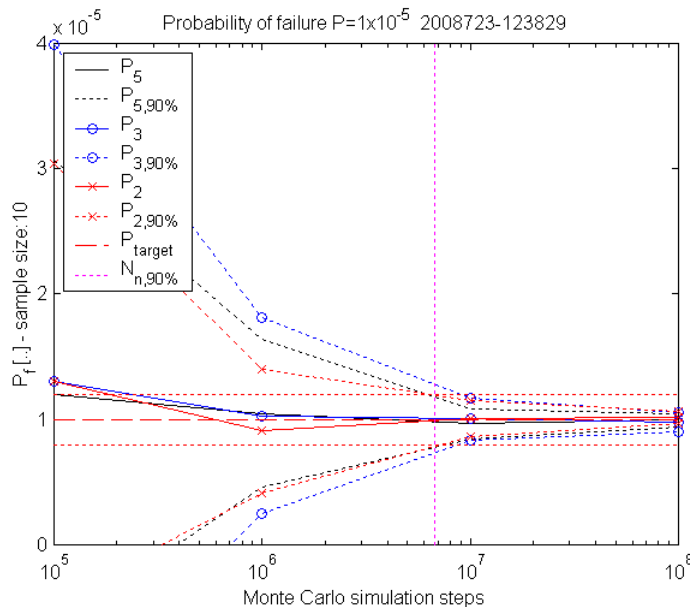
$$PF_5 = P(RF = 1) = P(X_1 = 1) \cdot \dots \cdot P(X_5 = 1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 10^{-5} \quad (11)$$

$$PF_3 = P(RF = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = 10^{-5} \quad (12)$$

$$PF_2 = P(RF = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{10} = 10^{-5} \quad (13)$$

$$N_n = P_f \left(1 - P_f \right) \left[\frac{t}{\varepsilon} \right]^2 = \frac{1}{100000} \left(1 - \frac{1}{100000} \right) \left[\frac{1.64485}{\frac{0.2}{100000}} \right]^2 = 6\,763\,791 \quad (14)$$

Závislost mezi počtem aplikovaných simulačních kroků a přesností odhadu uvádí následující graf. Vzhledem k větší časové náročnosti byla každá pravděpodobnost poruchy vypočítána jen 10krát. Křivky konfidenčního intervalu pravděpodobnosti poruchy se na Obr. 6 vyznačují větším rozptylem. I přes výše uvedený nedostatek v počtu vzorků je trend patrný. Počet histogramů zde neovlivňuje přesnost odhadu a k dostatečně přesnému odhadu pravděpodobnosti $P = 1 \times 10^{-5}$ postačí 6,8 mil. simulačních kroků Monte Carlo.



Obr. 6: Pravděpodobnost poruchy P_f jako nahodile proměnná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_f = 10^{-5}$. (PF_5 – 5 histogramy, PF_3 – 3 histogramy, PF_2 – 2 histogramy)

2.1.5. Doba simulace přímou metodou Monte Carlo

Pro zajímavost je v Tab. 2 uveden čas potřebný k odhadu pravděpodobnosti poruchy počítané v předchozí části. Doba je uvedena pro nutný počet simulačních kroků při využití programu *Anthill*.

Tab. 2: Doba simulace přímou metodou Monte Carlo

P	Počet histogramů	Monte Carlo (Anthill)	
		Počet kroků	Čas [sec]
1×10^{-2}	1, viz (7)	6696	<1
1×10^{-2}	2, viz (8)	6696	<1
1×10^{-3}	1, viz (9)	67571	4
1×10^{-3}	2, viz (9)	67571	4
1×10^{-3}	3, viz (9)	67571	4
1×10^{-4}	1, viz (10)	676315	45
1×10^{-4}	2, viz (10)	676315	45
1×10^{-4}	4, viz (10)	676315	45
1×10^{-5}	2, viz (13)	6763791	448
1×10^{-5}	3, viz (12)	6763791	448
1×10^{-5}	5, viz (11)	6763791	448

2.2. Přímý determinovaný výpočet

Numerické příklady řešení přímou metodou Monte Carlo uvedené v předchozí části 2.1 jsou pro porovnání vypočteny Přímým determinovaným výpočtem (PDPV, viz [4] a [5]) za pomoci programu *ProbCalc*. Ve všech zkoumaných případech vyšla požadovaná pravděpodobnost stejná jako exaktní řešení. Čas nutný k výpočtu byl ve všech případech menší než 1 sekunda, a to i pro pravděpodobnost $P = 10^{-5}$ a 5 histogramů. Výsledky jsou sumarizovány v Tab. 3.

Tab. 3: Odhad pravděpodobnosti poruchy metodou PDPV

P	Počet histogramů	PDPV (ProbCalc)	
		P_f	Čas [sec]
1×10^{-2}	1, viz (7)	0.01	<1
1×10^{-2}	2, viz (8)	0.01	<1
1×10^{-3}	1, viz (9)	0.001	<1
1×10^{-3}	2, viz (9)	0.001	<1
1×10^{-3}	3, viz (9)	0.001	<1
1×10^{-4}	1, viz (10)	0.0001	<1
1×10^{-4}	2, viz (10)	0.0001	<1
1×10^{-4}	4, viz (10)	0.0001	<1
1×10^{-5}	2, viz (13)	0.00001	<1
1×10^{-5}	3, viz (12)	0.00001	<1
1×10^{-5}	5, viz (11)	0.00001	<1

3 VÝSLEDKY

Numerické simulace modelující vztah mezi počtem simulačních kroků, cílovou pravděpodobností a počtem histogramů naznačují, že lze dle vztahu (4) odhadnout nutný počet simulačních kroků v závislosti na cílové pravděpodobnosti poruchy P_d , velikosti konfidenčního intervalu pro P_d a zvolenou statistickou úroveň spolehlivosti odhadu.

Dle (4) lze spočítat, že 1.0 mil. simulací se jeví pro návrhovou pravděpodobnost 7×10^{-5} jako dostatečný počet. Při tomto počtu simulací by více než 90 procent výpočtů P_f mělo padnout do intervalu $7 \times 10^{-5} \pm 1.4 \times 10^{-5}$. Nutný počet simulačních kroků pro posudky únosnosti $P_d = 7 \times 10^{-5}$ a použitelnosti $P_d = 7 \times 10^{-5}$ uvádí Tab. 4.

Tab. 4: Nutný počet simulačních kroků v závislosti na P_d

	P_d	0.00007	0.07
Tolerance	$\varepsilon (\pm 20\%)$	± 0.000014	± 0.014
Úroveň spolehlivosti	90%	966 194	899
	95%	1 371 848	1 276
	99%	2 369 441	2 204

Čas potřebný k výpočtu pravděpodobnosti poruchy je u zvolené úlohy v případě PDPV minimální, zatímco u metody Monte Carlo závisí na počtu nutných simulačních kroků. Dramatický rozdíl v rychlosti je způsoben druhem úlohy a je dán způsobem výpočtu pravděpodobnosti poruchy v metodě PDPV.

4 ZÁVĚR

V příspěvku je připomenuto, že pravděpodobnost poruchy je při užití přímé metody Monte Carlo rovněž náhodná veličina. Tato pravděpodobnost pak závisí na cílové pravděpodobnosti a na počtu simulačních kroků, jak uvádí mj. [14]. Je – li počet simulačních kroků dostatečně velký je možno, popsat rozdělení pravděpodobnosti poruchy normálním rozdělením. Na základě normálního rozdělení výskytu pravděpodobnosti poruchy je možno odhadnout nutný počet simulačních kroků pro dosažení požadované přesnosti, či určit přesnost získaného výsledku (konfidenční interval). Je ukázáno, že při 1 milionu simulačních kroků a pravděpodobnosti poruchy $P_f = 7 \times 10^{-5}$ se bude s 90-procentní jistotou nacházet výsledek simulace v rozsahu $7 \times 10^{-5} \pm 1.4 \times 10^{-5}$. Výsledky zvolených příkladů rovněž ukazují na nezávislost nutného počtu simulačních kroků na počtu histogramů vstupujících do výpočtu.

Výpočty metodou Monte Carlo a jejich statistické vyhodnocení potvrzují oprávněnost užití vztahu (4) pro výpočet nutného počtu simulačních kroků. Výpočet pravděpodobnosti poruchy metodou PDPV je proveden za účelem ověření přesnosti této metody. Výpočet vede ve zvolených úlohách k přesnému řešení, a to v minimálním čase. Nutno podotknout, že je metoda Monte Carlo robustní nástroj umožňující odhad pravděpodobnosti poruchy bez předchozí znalosti řešeného problému.

Další práce by bylo vhodné zaměřit na otestování výpočtu pravděpodobnosti poruchy při užití většího počtu histogramů obecnějších tvarů tak, aby do funkce poruchy vstupovalo více tříd použitých histogramů.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je GA ČR 105/07/1265.

LITERATURA

- [1] ČSN 73 1401 (1998). *Navrhování ocelových konstrukcí*, ČNI, Praha.
- [2] ČSN EN 1990 (2004). *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí*, ČNI, Praha.
- [3] Fegan, G. (2003). Chapter: „*Precision of Simulation Results*“ in [7].
- [4] Janas, P., Krejsa, M. (2003). Chapter 24.5 Using a Direct Determined Probabilistic Solution in the Framework of SBRA Method, In CD-ROM of [7].

- [5] Janas, P., Krejsa, M. (2002). Numerický výpočet pravděpodobnosti užitím useknutých histogramů při posuzování spolehlivosti konstrukcí. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava*, 2002, vol. II., (č. 1), s. 47-58.
- [6] Konečný, P. (2001). Kombinace zatížení a posudek táhla dle EC3 a SBRA. Sborník: *II. ročník celostátní konference: Spolehlivost konstrukcí*. Dům techniky Ostrava, ISBN 80-02-01410-3.
- [7] Marek P., Brozzetti J., Guštar M., Tikalsky P., Editors. (2003). *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software*. (Second extended edition)., Publisher: ITAM Academy of Sciences of Czech Republic, Prosecká 76, 190 00 Prague 9, Czech Republic. ISBN 80-86246-19-1.
- [8] Marek, P., Guštar, M., Bathon, L. *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*. Boca Taton, Florida, CRC Press, 1995, ISBN 0-8493-8286-6.
- [9] Marek, P., Guštar, M., Permaul, K. (1999). Transition from Partial Factors Method to Simulation Based Reliability Assessment in Structural Design. *Journal: Probabilistic Engineering Mechanics 14* (1999), pp. 105-118, Elsevier Science Ltd.
- [10] Math World – Confidence Interval - <http://mathworld.wolfram.com/ConfidenceInterval.html>
- [11] Praks, P. (2002). “Numerical aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems“. *Proceedings: International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. ITAM, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague. ISBN 80-86246-17-5.
- [12] Praks, P. (2006). *Analýza spolehlivosti s iteračními řešiči*. Doctoral dissertation thesis, VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, Department of Applied mathematics, December, 2005.
- [13] Praks, P., Konečný, P. (2003). Chapter „Direct Monte Carlo Method vs. Improved Methods Considering Applications in Designers Every Day Work“ in CD-ROM of [7].
- [14] Schuëller, G. (2002). Past, present & Future os Simulation-based Structural Analysis In. Brozzetti, J., Marek, P. (2002). *Teaching Reliability*. *Proceedings: International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the CzechRepublic, Prague, June 2002. ISBN 80-86246-17-5.
- [15] Shooman, M.L. (1968) *Probabilistic Reliability: An Engineering Approach*, McGraw-Hill, New York.

Oponentní posudek vypracoval: Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D.