

Petr KONEČNÝ¹

VLIV POČTU PROMĚNNÝCH NA PŘESNOST ODHADU PRAVDĚPODOBNOSTI PORUCHY METODOU MONTE CARLO

**EFFECT OF THE NUMBER OF RANDOM VARIABLES ON THE PRECISION OF THE
PROBABILITY LIKELIHOOD ESTIMATION USING MONTE CARLO SIMULATION**

Abstrakt

Příspěvek se zabývá vztahem mezi cílovou pravděpodobností, počtem náhodně proměnných a počtem simulací Monte Carlo nutných k získání uspokojivého výsledku. Je zjištěno, že u přímé metody Monte Carlo ve studovaném případě nezávisí přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy na počtu náhodných veličin. Výsledky získané Monte Carlo simulací jsou porovnány s řešením pomocí přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu (PDPV), přičemž užití PDPV může vést u dobře zmapovaných úloh k rapidní úspoře výpočetního času.

Abstract

The paper deals with the relationship between the target probability, number of applied random variables and the number of Monte Carlo simulation steps needed to obtain satisfactory results. The precision of probability of failure estimation using crude Monte Carlo simulation is independent on the number of random variables in studied case. Results obtained by Monte Carlo simulation are compared with Direct Determined Probabilistic solution that allows for the fast solution in case of well-mapped tasks.

1 ÚVOD - PRAVDĚPODOBNOST PORUCHY JAKO NÁHODNÁ VELIČINA

Analyzujeme-li inženýrskou spolehlivost simulačními nástroji typu Monte Carlo, užívanými např. v metodě SBRA (viz [6], [5]), které užívají pro odhad pravděpodobnosti poruchy generátory náhodných čísel, je nutné i na výsledný odhad pravděpodobnosti pohlížet jako na náhodnou veličinu (viz např. [10], [11], [1] a [9]).

Přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy metodou Monte Carlo je závislá na cílové pravděpodobnosti poruchy a počtu simulačních kroků viz. např. [10], [11], [1]. U přímé metody Monte Carlo by neměl mít počet náhodně proměnných obecného tvaru vliv na chybu odhadu cílové pravděpodobnosti (viz. [10], [11]). V práci [4] bylo u binárních histogramů provedeno ověření pro cílové pravděpodobnosti $P_t = 1 \times 10^{-2}$, $P_t = 1 \times 10^{-3}$, $P_t = 1 \times 10^{-4}$ a $P_t = 1 \times 10^{-5}$. Zde nebyl pozorován vztah mezi počtem histogramů a přesností odhadu pravděpodobnosti poruchy.

Příspěvek si klade za cíl ověřit, zda počet náhodně proměnných obecného tvaru nemá vliv na přesnost odhadu cílové pravděpodobnosti u přímé metody Monte Carlo. Výpočet metodou Monte Carlo je porovnán s výpočtem metodou PDPV [2], [3].

2 METODIKA

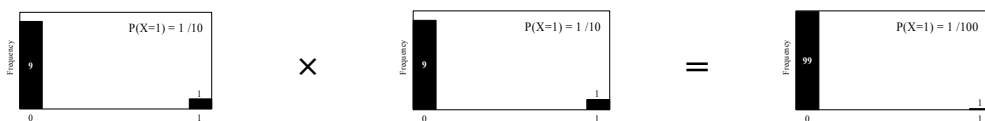
Princip numerických pokusů pro ověření vztahu mezi počtem náhodně proměnných a přesností odhadu simulace Monte Carlo je následující. Vytvoříme-li příklad, u kterého známe

¹ Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební (FAST) Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 384, e-mail: petr.konecny@vsb.cz.

cílovou pravděpodobnost poruchy, pak je možno ověřit přesnost výpočtu této pravděpodobnosti u metody Monte Carlo. Na každou simulaci Monte Carlo o daném počtu simulačních kroků se díváme jako na jeden vzorek. Tyto vzorky jsme schopni statisticky vyhodnotit, získáme-li jich dostatečné množství, a to pro různé počty simulačních kroků.

2.1 Součin histogramů

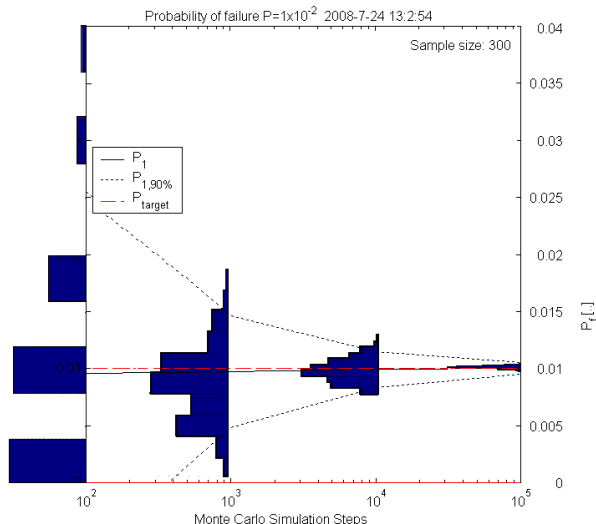
Jako vzorový příklad je uveden součin binárních histogramů použitý v práci [4]. V této práci byl ověřen vztah mezi počtem náhodně proměnných a přesností odhadu za pomoci simulace na příkladech součinu binárních histogramů se známou exaktně vypočitatelnou pravděpodobností. Příklad součinu dvou histogramů uvádí následující obrázek. Pravděpodobnost výskytu hodnoty 1 ve výsledném součinu RF je rovna $1/100$.



Obr.1: Součin dvou histogramů $RF = X1 \times X2$

Pravděpodobnost je analyzována metodou Monte Carlo. Je užito prostředí *Matlab* a simulačního nástroje jehož jádro vytvořil P. Praks, viz [7] a [8].

Stochastický charakter odhadu pravděpodobnosti poruchy naznačuje Obr. 2, který zobrazuje rozdělení pravděpodobnosti poruchy pro 300 výpočtů pravděpodobnosti poruchy $P = 1/100$ odhadnuté ($N = 10^2, 10^3 \dots 10^5$). Rozptyl odhadu klesá s nárůstem počtu simulačních kroků.



Obr.2: Odhad pravděpodobnosti poruchy P_f (svislá osa) jako náhodná veličina odhadnutá 300-krát v závislosti na počtu simulací Monte Carlo (vodorovná osa), cílová pravděpodobnost P_t je $1/100$

2.2 Součet histogramů

Pomocí Centrálního limitního teorému (CLT) je možno z obecného počtu identických nezávislých náhodně proměnných vytvořit normální rozdělení o známém průměru a známé směrodatné odchylce (viz. např. [12]). Předpokladem je součet I rozdělení x o stejné distribuční křivce. Součtem je normální rozdělení X :

$$X = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I x_i, \quad (1)$$

kde je:

- I počet shodných statisticky nezávislých rozdělení x_i ,
 x_i rozdělení o průměru $\mu_{x,i}$ a směrodatné odchylce $\sigma_{x,i}$,
 X výsledné rozdělení o průměru μ_X a směrodatné odchylce σ_X , které konverguje k normálnímu rozdělení při dostatečně velkém počtu vstupních rozdělení x_i (a tedy pro velké I).

Průměr μ_X výsledného normálního rozdělení X je jeho roven průměru μ_x náhodně proměnného vstupu. Směrodatná odchylka výsledného souboru σ_X je závislá na směrodatné odchylce vstupu $\sigma_{x,i}$ a nepřímo závislá na odmocnině z počtu náhodně proměnných \sqrt{I} :

$$\sigma_X = \frac{\sigma_{x,i}}{\sqrt{I}} \quad (2)$$

Získáme-li parametry normálního rozdělení, jsme schopni sestavit jeho distribuční funkci a určit její hodnotu pro zvolenou pravděpodobnost podkročení. U získaného normálního rozdělení o průměru μ_X a směrodatné odchylce σ_X je možno pro zvolené pravděpodobnosti nepřekročení (např. $P_t = 1 \times 10^{-4}$, $P_t = 1 \times 10^{-3}$ a $P_t = 1 \times 10^{-2}$) odvodit z jeho inverzní distribuční funkce odpovídající hraniční hodnoty X_h .

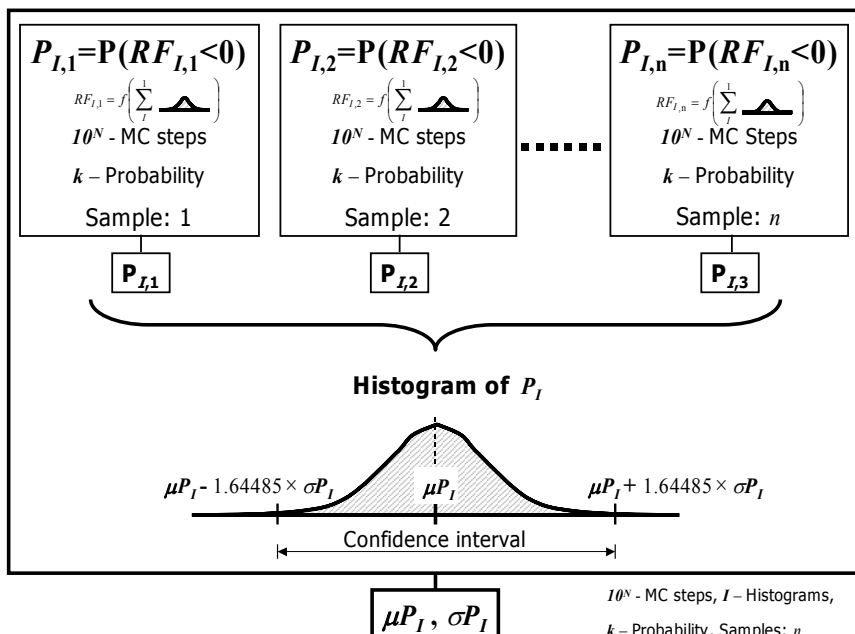
$$X_h = \Phi^{-1}(P_t) \quad (3)$$

Získané normální rozdělení lze tedy s výhodou použít pro testování závislosti počtu náhodně proměnných na přesnost odhadu metody Monte Carlo, neboť testovaná pravděpodobnost P_I je:

$$P_I = P(X_{I,h} - X \leq 0) \quad (4)$$

kde je:

- P_I hledaná pravděpodobnost pro I uvažovaných histogramů,
 X výsledné normální rozdělení o μ_X a směrodatné odchylce σ_X ,
 $X_{I,h}$ hraniční hodnota rozdělení X pro I náhodných veličin.

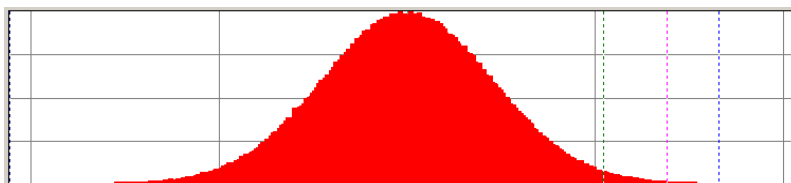


Obr.3: Schéma výpočtu jedné sady vstupů pro parametrickou studii. Průměr μP_I a směrodatná odchylka σP_I odhadnuté pravděpodobnosti odpovídají zvolenému počtu simulačních kroků 10^N , počtu histogramů I , cílové pravděpodobnosti k , přičemž počet vzorků je n .

3 NUMERICKÉ PŘÍKLADY

3.1 Součet náhodně proměnných – CLT

Pro ověření přesnosti simulace Monte Carlo s využitím Centrálního limitního teorému (CLT) je užito useknutého normálního rozdělení (viz. Obr. 4).



Obr.4: Pravděpodobnostní rozdělení náhodně proměnných vstupů x_i - histogram normal3.dis (viz. [5]); $\sigma_{x,i} = 0.9969$, $\mu_{x,i} = 6.224 \times 10^{-17} \approx 0$, $\langle -3.5..3.5 \rangle$

Součtem libovolného množství nezávislých realizací zvoleného rozdělení dle vztahu (1) lze získat normální rozdělení o směrodatné odchylce popsané v (2). Hraníční hodnoty výsledného normálního rozdělení X potřebné k ověření přesnosti simulace Monte Carlo uvádí Tab. 1.

Tab.1: Hraníční hodnoty a statistické parametry výsledného normálního rozdělení X odpovídající uvažovaným pravděpodobnostem nepřekročení P_t a počtu náhodně proměnných N .

I	σ_X	μ_X	Hraníční hodnoty výsledného rozdělení $X_{I,h}$		
			$P_t = (1 \times 10^{-2})$	$P_t = (1 \times 10^{-3})$	$P_t = (1 \times 10^{-4})$
5	0.445827	0.00E+00	-1.03715	-1.37772	-1.65824
10	0.315247	0.00E+00	-0.73337	-0.97419	-1.17255
20	0.222914	0.00E+00	-0.51857	-0.68886	-0.82912

Vztah (5) naznačuje odhad pravděpodobnosti P_5 metodou Monte Carlo pro 5 histogramů a cílovou pravděpodobností $P_t = 1 \times 10^{-4}$.

$$P_5 = P(X_{5,h} - X_5 \leq 0) = P(1.65824 - X \leq 0) \approx 1 \times 10^{-4} \quad (5)$$

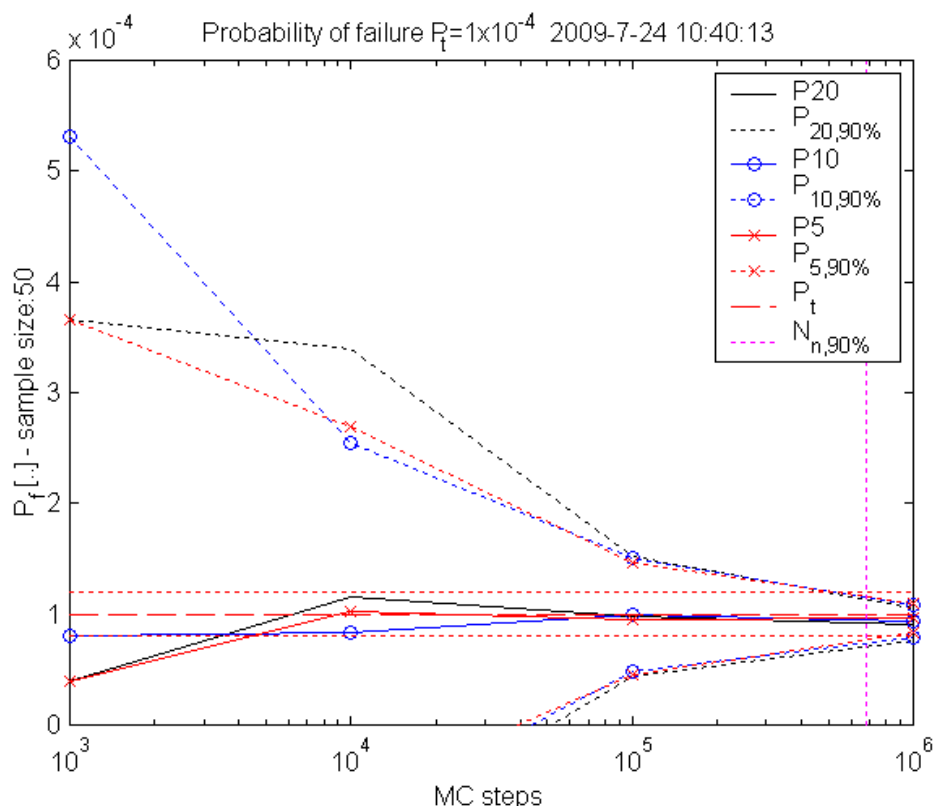
Nutno podotknout, že výsledné pravděpodobnosti P_t jsou při 5 a 10 náhodně proměnných lehce podhodnoceny. Tato nepřesnost je akceptovatelná s ohledem na stanovený cíl. Analogicky je možno odvodit výpočet pro 10 a 20 užitých histogramů, a dále pro $P_t = 1 \times 10^{-3}$ a $P_t = 1 \times 10^{-2}$.

3.1.1 Pravděpodobnost poruchy $P_t = 1 \times 10^{-4}$

Následující graf ukazuje závislost mezi počtem aplikovaných simulačních kroků a rozptylem odhadu pravděpodobnosti poruchy P_t . Odhad pravděpodobnosti poruchy je proveden s využitím simulačního nástroje Monte Carlo. Pravděpodobnost $P_t = 1 \times 10^{-4}$ řádově odpovídá hodnotě aplikované pro mezní stavy únosnosti ($P_d = 0.7 \times 10^{-4}$), a je odhadnuta s využitím 5, 10 a 20 histogramů. Nástin exaktního řešení uvádí vztah (5).

Každá pravděpodobnost je odhadnuta pro zvolený počet simulačních kroků ($N = 10^3, 10^4, 10^6$) 50-krát a následně je statisticky vyhodnocena. Mezilehlé hodnoty jsou proloženy přímkou. Graf na Obr. 5 obsahuje průměrnou hodnotu a také hranice konfidenčního intervalu. Je uvažováno s rozptylem odhadu pravděpodobnosti poruchy ± 20 procent, a to na 90 procentní úrovni spolehlivosti). Přičemž požadovanou přesnost odhadu při $P_t = 1 \times 10^{-4}$ je možno dosáhnout s cca 676 000 simulačními kroky, jak uvádí následující vztah (viz. [11], [4]):

$$N_n = P_t(1 - P_t) \left[\frac{t}{\varepsilon} \right]^2 = \frac{1}{10000} \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \left[\frac{1.64485}{\frac{0.2}{10000}} \right]^2 = 676315. \quad (6)$$



Obr.5: Pravděpodobnost poruchy P_f jako náhodná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_t = 10^{-4}$. (P_{20} – 20 histogramů, P_{10} – 10 histogramů, P_5 – 5 histogramů)

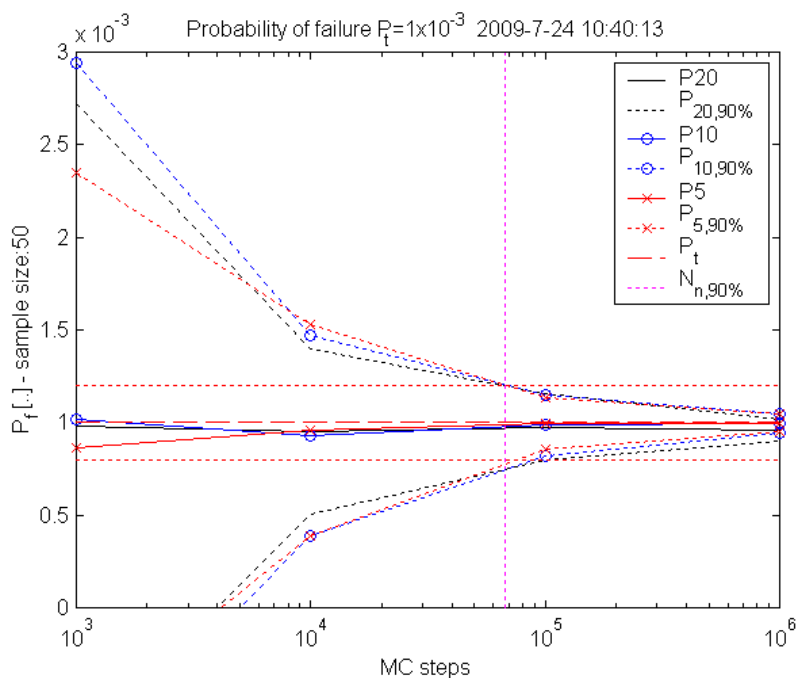
Výsledek numerické simulace na Obr. 5 ukazuje, že počet histogramů neovlivňuje přesnost odhadu v závislosti na počtu simulačních kroků. Průměry a rozptyly výsledných pravděpodobností P_5 , P_{10} a P_{20} se pro 10^5 a 10^6 simulačních kroků výrazně vzájemně neliší, což odpovídá doporučeným 676 000 simulacím.

3.1.2 Pravděpodobnosti poruchy $P_t = 1 \times 10^{-3}$ a $P_t = 1 \times 10^{-2}$

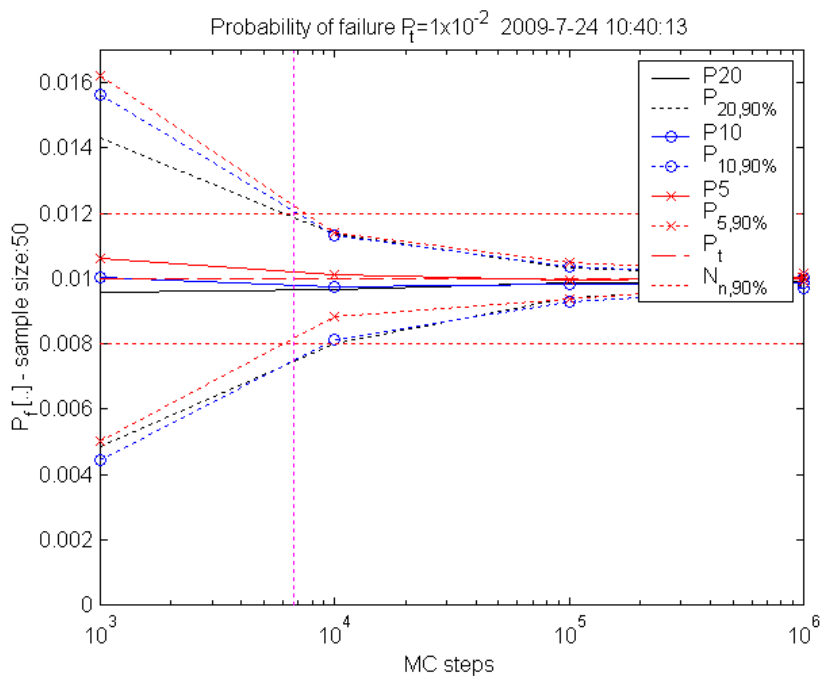
Při odhadu pravděpodobností $P_t = 1 \times 10^{-3}$ a $P_t = 1 \times 10^{-2}$ vychází výsledky podobně jako v předchozím odstavci, viz Obr. 6 a Obr. 7. Počet histogramů nemá ani v těchto případech vliv na přesnost odhadované pravděpodobnosti.

3.2 Výsledky a výpočetní čas

V Tab. 2 jsou uvedeny vypočtené pravděpodobnosti a je zde uveden i čas potřebný k odhadu pravděpodobnosti poruchy. Doba výpočtu je uvedena pro metodu Monte Carlo a nutný počet simulačních kroků při využití programu *Anthill*. Tato doba je porovnána s časem výpočtu



Obr.6: Pravděpodobnost poruchy P_f jako náhodná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_t = 10^{-3}$. (P_{20} – 20 histogramů, P_{10} – 10 histogramů, P_5 – 5 histogramů)



Obr.7: Pravděpodobnost poruchy P_f jako náhodná veličina v závislosti na počtu simulací Monte Carlo. Exaktní pravděpodobnost poruchy $P_t = 10^{-2}$. (P_{20} – 20 histogramů, P_{10} – 10 histogramů, P_5 – 5 histogramů)

Přímým determinovaným výpočtem (PDPV, viz [2] a [3]) za pomoci programu *ProbCalc*. Ve všech zkoumaných případech vyšla požadovaná pravděpodobnost v očekávaném rozmezí $\pm 20\%$, a to jak metodou Monte Carlo, tak metodou PDPV. Nutno podotknout, že pro účely porovnání výpočetního času s *Anthillem* není k výpočtu *ProbCalcem* užito definice mezního stavu s použitím DLL knihovny.

Čas nutný k výpočtu metodou PDPV je odvislý od zvolené metodiky řešení. V případě prosté kombinace všech histogramů o 256 třídách by přicházelo v úvahu $1,1 \times 10^{12}$ simulací pro 5 náhodně proměnných, což by odpovídalo asi 239 dnům výpočtu. Uvažovat o prostém součtu 20 proměnných je tedy nemyslitelné, protože výpočetní náročnost s počtem proměnných dramaticky narůstá. Pro vlastní výpočet metodou PDPV je nutno zvolit vhodnou strategii. V případě součtu jednotlivých náhodně proměnných před vlastním výpočtem, volba *Kombinace* v programu ProbCalc [3], dojde k drastickému poklesu výpočetní náročnosti. Čas výpočtu je pak ve všech uvažovaných případech menší než 1 sekunda.

Tab.2: Porovnání cílových pravděpodobností P_t s vypočtenými pravděpodobnostmi P_I pro I histogramů, a to včetně doby simulace přímou metodou Monte Carlo a metodou PDPV. U metody Monte Carlo je uveden průměr a konfidenční interval z 50 výsledných pravděpodobností.

P_t		Monte Carlo (Anthill)			PDPV (ProbCalc)		
		$\varnothing P_t \pm P_{t,90}$	Počet kroků	Čas [sec]	P_I	Popis	Čas [sec]
1×10^{-2}	5	$(0.97 \pm 0.17) \times 10^{-2}$	6.7 tis.	1	0.97×10^{-2}	Součet náhodně proměnných proveden metodou kombinace. Výpočet proběhl bez optimalizace	<1
	10	$(0.97 \pm 0.16) \times 10^{-2}$	6.7 tis.	1	0.99×10^{-2}		<1
	20	$(1.0 \pm 0.13) \times 10^{-2}$	6.7 tis.	1	0.92×10^{-2}		<1
1×10^{-3}	5	$(0.98 \pm 0.18) \times 10^{-3}$	67.5 tis.	11	0.93×10^{-3}		<1
	10	$(0.98 \pm 0.17) \times 10^{-3}$	67.5 tis.	11	0.96×10^{-3}		<1
	20	$(0.99 \pm 0.14) \times 10^{-3}$	67.5 tis.	11	0.94×10^{-3}		<1
1×10^{-4}	5	$(0.90 \pm 0.15) \times 10^{-4}$	675.3 tis.	110	0.86×10^{-4}		<1
	10	$(0.94 \pm 0.15) \times 10^{-4}$	675.3 tis.	110	0.93×10^{-4}		<1
	20	$(0.97 \pm 0.13) \times 10^{-4}$	675.3 tis.	110	0.91×10^{-4}		<1

4 ZÁVĚR

V příspěvku je připomenuto, že odhad pravděpodobnosti poruchy je při užití přímé metody Monte Carlo rovněž náhodná veličina. Je zjištěno, že u přímé metody Monte Carlo ve studovaném případě nezávisí přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy na počtu náhodných veličin. Příspěvek ověřuje, že na přesnost odhadu metodou Monte Carlo má vliv velikost cílové pravděpodobnosti P_t a počet aplikovaných simulačních kroků, jak uvádí mj. [11]. Je – li počet simulačních kroků dostatečně velký, je možno popsat rozdělení pravděpodobnosti poruchy P_t normálním rozdělením. Na základě normálního rozdělení odhadu pravděpodobnosti poruchy je možno odhadnout nutný počet simulačních kroků pro dosažení požadované přesnosti, či odhadnout přesnost získaného výsledku (konfidenční interval).

Porovnávací řešení metodou PDPV vedlo k získání uspokojivých pravděpodobností poruchy, které se stejně jako výsledky získané metodou Monte Carlo pohybovaly v uvažované toleranci. U

metody PDPV je důležité zvolit správnou strategii řešení tak, aby bylo možno výpočetní čas výrazně zredukovat. U dobře zmapovaných úloh je pak možno metodou PDPV dojít k rapidní úspoře výpočetního času, a to i v porovnání s přímou metodou Monte Carlo.

Další práce by bylo vhodné zaměřit na porovnání přímé metody Monte Carlo a pokročilých metod Monte Carlo typu Importance Sampling a Latin Hypercube Sampling s ohledem na počet vstupních náhodně proměnných a nutného počtu simulačních kroků.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je GA ČR 105/07/1265.

LITERATURA

- [1] FEGAN, G. Chapter: „Precision Of Simulation Results.“ in [5], 2003.
- [2] JANAS, P., KREJSA, M. Chapter 24.5 Using a Direct Determined Probabilistic Solution in the Framework of SBRA Method. In CD-ROM of [5], 2003.
- [3] JANAS, P., KREJSA, M. Numerický výpočet pravděpodobnosti užitím useknutých histogramů při posuzování spolehlivosti konstrukcí. In *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava*, 2002, vol. II., (č. 1), s. 47-58. ISSN 1213-1962.
- [4] KONEČNÝ, P. Přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy, In *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava*. Číslo 1, rok 2008, ročník VIII, řada stavební, článek č. 33, pp. 333-344, 2008, ISBN 978-80-248-1883-2, ISSN 1213-1962.
- [5] MAREK P., BROZZETTI J., GUŠTAR M., TIKALSKY P., Editors. *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software, (Second extended edition)*. Publisher: ITAM Academy of Sciences of Czech Republic, Prosecká 76, 190 00 Prague 9, Czech Republic, 2003. ISBN 80-86246-19-1.
- [6] MAREK, P., GUŠTAR, M., BATHON, L. *Simulation-Based Reliability Assesment for Structural Engineers*. Boca Taton, Florida, CRC Press, 1995, ISBN 0-8493-8286-6.
- [7] PRAKS, P. Numerical aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems. In *International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. ITAM, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2002. ISBN 80-86246-17-5.
- [8] PRAKS, P. *Analýza spolehlivosti s iteračními řešiči*. Doctoral dissertation thesis, VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, Department of Applied mathematics, December, 2005.
- [9] PRAKS, P., KONEČNÝ, P. Chapter „Direct Monte Carlo Method vs. Improved Methods Considering Applications in Designers Every Day Work“ in CD-ROM of [5], 2003.
- [10] SHOOMAN, M.L. *Probabilistic Reliability: An Engineering Approach*. MCGRAW-HILL, New York, 1968.
- [11] SCHUËLLER, G. Past, present & Future of Simulation-based Structural Analysis In *International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the CzechRepublic, Prague, June 2002. ISBN 80-86246-17-5.
- [12] MATH WORLD – Central Limit Theorem - <http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html>

Oponentní posudek vypracoval:

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., ČVUT v Praze - Kloknerův ústav