

**Stanislav SEITL<sup>1</sup>, Ladislav ŘOUTIL<sup>2</sup>, Václav VESELÝ<sup>3</sup>**

**NUMERICKÁ ANALÝZA VLIVU VLASTNÍ TÍHY VZORKU PRO KLÍNOVÉ ŠTÍPÁNÍ NA  
ÚROVEŇ CONSTRAINTU U ČELA TRHLINY**

**NUMERICAL ANALYSIS OF INFLUENCE OF OWN WEIGHT OF WEDGE SPLITTING  
SPECIMEN ON CONSTRAINT LEVEL AT CRACK TIP**

**Abstrakt**

Předmětem příspěvku je získání nových informací o lomově mechanickém chování stavebních materiálu na cementové bázi. K zjištění lomových parametrů se používají vzorky pro klínové štípání. Obsah příspěvku je pak zaměřen na kvantifikaci vlivu vlastní tíhy vzorku, která reprezentuje část reakce z podpory na dolním lici tělesa. K charakterizaci constraintu jsou použity nástroje dvouparametrové lomové mechaniky. Na závěr je vysloveno doporučení, kdy lze při stanovování lomově mechanických parametrů betonových kompozitů tíhovou sílu od vlastní hmotnosti vzorku na rozdíl od vertikální tlačné síly zanedbat.

**Abstract**

Subject of the contribution is to obtain new information about the fracture behavior of cementations building materials in the wedge splitting test (WST). Particularly, the paper investigates the influence of the own wedge splitting specimen weight, that represents a portion of the reaction of the bottom support of the specimen, on the fracture parameters via tools of the two-parameter fracture mechanics. In the end it is presented the suggestion when it is possible not to take the own weight of wedge splitting specimen into account.

**1 ÚVOD**

Test používající k šíření trhliny rozevírání vzorku pomocí klínu (anglicky wedge splitting test- WST– viz obr. 1a) byl představen v práci autorů Linsbauer a Tschegg (1986) a dále je ve své práci rozvinuli Brühwiler a Wittmann (1990). Autory Guinea a kol. (1996) byla následně prezentována parametrická studie vlivu okrajových podmínek na hodnotu součinitele intenzity napětí pro WST. Karihaloo a Xiao (2001) provedli za použití hybridního elementu výpočet nejenom součinitele intenzity napětí ale vyšších členů Willimasova (1957) rozvoje. Zdůrazněme, že se jedná o test se stabilním růstem trhliny a jeho nespornou výhodou je použití relativně malého množství materiálu na rozdíl od standardně užívaných testů jako jsou např. tříbodový nebo čtyřbodový ohyb trámce se zářezem (RILEM). Je to poměrně nedávno zavedená procedura pro měření základních lomově mechanických parametrů jako jsou např. lomová energie nebo charakteristiky tahového změkčení kvazikřehkých materiálů. Mezi tyto materiály se řadí např. stavební keramika, skalní horniny, a v neposlední řadě i cementové kompozity. Nespornou výhodou je uplatnění WST při stanovování lomově-mechanických parametrů na jádrových vývrtech odebraných ze stávajících stavebních konstrukcí.

---

<sup>1</sup> Ing. Stanislav Seitzl, Ph.D., Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, Žitkova 22, 616 62 Brno, tel.: (+420) 532 290 348, e-mail: seitzl@ipm.cz.

<sup>2</sup> Ing. Ladislav Řoutil, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veverčí 331/95, 602 00 Brno, tel. (+420) 541 240 994, e-mail: routil.l@fce.vutbr.cz.

<sup>3</sup> Ing. Václav Veselý, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veverčí 331/95, 602 00 Brno, tel. (+420) 541 247 362, e-mail: vesely.vl@fce.vutbr.cz.

Přes již rozsáhlé použití WST (Xiaon a kol. 2004, Löfgren a kol. 2005, Walter a kol. 2005, Xu a kol. 2007) doposud nebyla provedena podrobná analýza vlivu okrajových podmínek WST zahrnující zatížení od vlastní tíhy tělesa. Cílem příspěvku je za použití metody konečných prvků (MKP) analyzovat vliv vlastní tíhy vzorku na hodnotu constraintu (charakterizovaného hodnotou  $T$ -napětí) v krychlovém vzorku pro klínové štípání (obr. 1b). Poznamenejme, že příspěvek uceluje analýzu šíření trhliny ve vzorcích pro WST, a tedy navazuje na předchozí práce autora. V práci Seitl a kol. (2009c) je představen přístup použitý v analýzách šíření trhlin v tělesech pro WST a provádí se zde srovnání WST s tvarově podobným tělesem pro zkoušku excentrickým tahem v rámci dvouparametrové lineární lomové mechaniky. Práce Seitl a kol. (2009a,b) pak vyšetřují vliv přitlačné síly na hodnotu constraintu a další související vlivy. Poznamenejme, že vliv constraintu na lomové chování materiálů a jeho důsledky pro navrhování a posuzování konstrukcí není v této práci diskutován, v tomto směru lze uvést např. přehledové práce Constraint effects in Fracture (1993 a 1995).

## 2 TEORETICKÉ POZADÍ

Dvouparametrová lineárně elastická lomová mechanika rozšiřuje klasickou lomovou mechaniku tím, že bere v úvahu nejenom první, singulární člen Williamsova rozvoje, ale i jeho druhý, konstantní člen. V případě, že trhlina je orientovaná podél osy  $x$  a  $(r, \theta)$  jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, lze pro případ normálového namáhání působícího ve směru osy  $y$  (mód I) vyjádřit složky napětí v následující podobě:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T \delta_{li} \delta_{lj}, \quad (1)$$

kde:

$K_I$  – součinitel intenzity napětí [ $\text{MPa m}^{1/2}$ ],

$T$  –  $T$ -napětí [ $\text{MPa}$ ],

$\delta_{kl}$  – Kroneckerovo delta [-],

$f_{ij}$  – tvarová funkce polárního úhlu  $\theta$ .

Poznamenejme, že  $T$ -napětí představuje složku napětí  $\sigma_{xx}$  působící rovnoběžně s povrchem trhliny, je nenulové pro normálové namáhání. Parametr  $T$  kvantifikuje velikost constraintu (záporná hodnota odpovídá malému constraintu a kladná hodnota  $T$ -napětí odpovídá vysokému constraintu). Význam termínu constraint lze zjednodušeně vyložit jako stísnění rozložení napětí (deformace) v okolí vrcholu trhliny vedoucí k omezení rozsahu zóny, v níž dochází k překročení meze lineárního chování materiálů.

Z praktických důvodů je výhodnější používat pro charakteristiku lomových parametrů bezrozměrné parametry. Pro součinitel intenzity napětí pro geometrii WST:

$$B_1 = \frac{K_I}{K_0}, \text{ přičemž } K_0 = \frac{P_{sp}}{t\sqrt{W}} \quad (2)$$

kde:

$P_{sp}$  – síla rozevírající trhlínu (splitting force) [N],

$t$  – tloušťka tělesa [mm],

$W$  – charakteristický rozměr WST tělesa [mm].

Pro  $T$ -napětí zavedli Leever s Radonem (1983) bezrozměrný parametr

$$B_2 = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_I} \quad (3)$$

kde:

$a$  – délka trhliny [mm] (měřeno od průmětu bodu vnášení zatěžující síly do roviny trhliny – viz obr. 1).

### 3 NUMERICKÁ ANALÝZA

$$P_v = P_{sp} k, \text{ přičemž } k = \frac{2 \tan \alpha_w + \mu_c}{1 - \mu_c \tan \alpha_w} \quad (4)$$

$\alpha_w$  – úhel rozevřajícího klínu [°],  
 $\mu_c$  – koeficient tření v ložisku [-].

Pro numerickou analýzu byl zvolen základní rozměr tělesa  $W=100$  mm používaný pro experimentální určování mechanických parametrů silikátových kompozitů. Další rozměry tělesa byly následující:  $e=35$  mm,  $f=30$  mm,  $h=10$  mm,  $d_n=20$  mm. Místo počátečního zářezu byla v MKP modelu užita přímo trhlina (šířka rovna nule).

$$\alpha = \frac{c + (d_n - h)}{W - h} \quad (5)$$

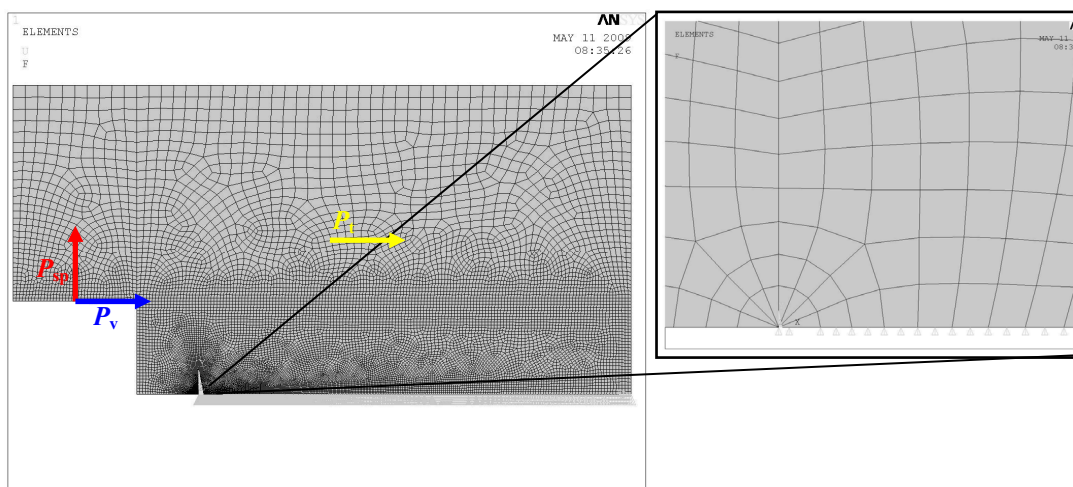
229

$W, h, c, d_n$  – charakteristické rozměry WST tělesa [mm], viz obr. 1.

Numerický výpočet pak byl proveden pro parametr  $\alpha$  v intervalu  $\langle 0,2; 0,9 \rangle$ , což pokrývá předpokládané spektrum běžně měřených délek trhlin.

Vstupní materiálová data pro výpočet byla převzata z dostupné literatury jako běžné hodnoty pro kompozity na bázi křemíku a byla následující: Youngův modul  $E = 44000$  MPa a Poissonovo číslo  $\nu = 0,2$ , hodnota součinitele intenzity napětí (lomová houževnatost betonových kompozitů)  $K_{IC} = 25$  MPa mm<sup>1/2</sup> (odpovídá kritické hodnotě šíření trhliny v betonových kompozitech) a hodnota objemové hmotnosti pro výpočet vlastního tíhového zatížení byla zvolena jako dolní mez pro lehké betony  $\rho_1 = 2,0 \times 10^{-6}$  kg/mm<sup>3</sup> a horní mez pro betony těžké  $\rho_2 = 4,5 \times 10^{-6}$  kg/mm<sup>3</sup>. Uvažovaná síla od vlastní hmotnosti tělesa je pak nahrazena silovou dvojicí umístěnou do těžišť polovin ploch viz obr. 1. c) a obr.2.

Úloha byla modelována programem ANSYS (Ansys 2005) jako rovinná za podmínek rovinné deformace (tloušťka tělesa je 100 mm) s použitím prvků PLANE 82. Nejmenší velikost elementu byla u kořene trhliny a nabývala hodnotu  $1 \times 10^{-5}$  mm. S využitím symetrie tělesa byla modelována polovina tělesa, typickou použitou MKP síť spolu s detailem okolí kořene trhliny lze vidět na obr. 2.



Obr. 2: MKP síť použitá v prováděných výpočtech – symetrická polovina krychlového WST vzorku s přiblížením oblasti u čela trhliny (použití trhlínového prvku s posunutým uzlovým bodem)

Výpočet hodnot součinitelů intenzity napětí byl proveden pomocí příkazu KCALC, který je implementován v použitém výpočtovém systému ANSYS. Pro kontrolu byly hodnoty součinitelů intenzity napětí pro normálový mód spočteny s použitím  $J$ -integrálu.

Hodnoty  $T$ -napětí byly získány použitím elementu s posunutým uzlem do jedné čtvrtiny velikosti elementu (Tan a Wang 2003), kde A-značí uzel ve vrcholu trhliny, B- posunutý uzel a C- na konci elementu.

$$T = -\frac{2E}{(1-\nu^2)l} [u_i^{(A)} - 4u_i^{(B)} + 2u_i^{(C)}] \quad (6)$$

kde:

$E$  – Youngův modul [MPa],

$\nu$  – Poissonovo číslo [-],

$l$  – délka elementu [mm],

$u_i^{(k)}$  – posuv uzlů na elementu [mm].

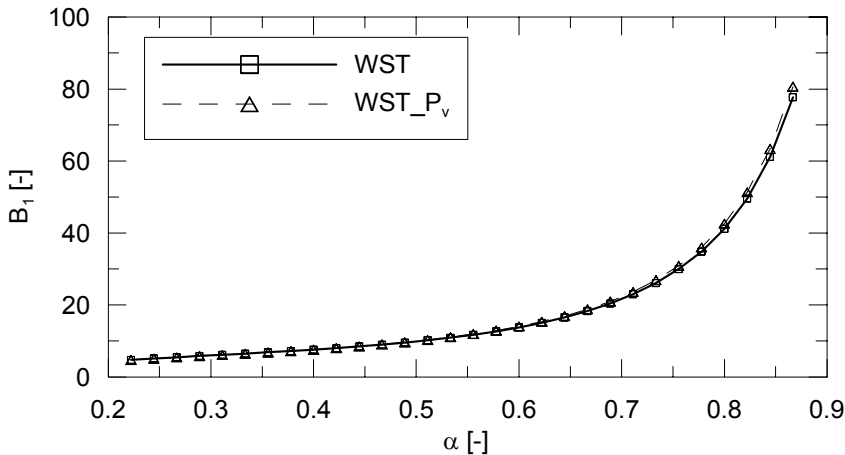
Byla použita také diferenční metoda (Yang a Ravi-Chandar 1999), která vychází ze vztahu:

$$T = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}). \quad (7)$$

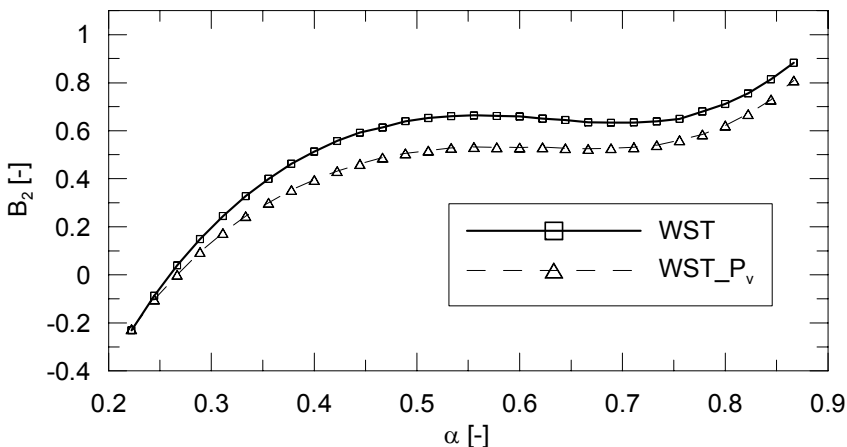
Složky napětí  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  jsou vypočteny pro  $\theta = 0$ ). Hodnota  $T$ -napětí pak byla získána extrapolací lineární části závislosti pro  $r \rightarrow 0$ . Obě použité metody poskytují prakticky stejné výsledky – rozdíly v hodnotách jsou v řádu promile.

#### 4 NUMERICKÉ VÝSLEDKY A DISKUSE

Pro ilustraci vlivu vertikální přitlačné síly  $P_v$  jsou na obr. 3 a 4 uvedeny vypočtené hodnoty součinitele intenzity napětí  $K$  a  $T$ -napětí, které jsou vyjádřeny pomocí bezrozměrných faktorů biaxiality – viz rovnice (2) a (3). Tyto závislosti byly již dříve uvedeny v práci autora (Seitl a kol. 2009a). Obr. 3 vyjadřuje pomocí parametru  $B_1$  závislost hodnot součinitele intenzity napětí na délce trhliny. Z uvedeného grafu je patrné, že vliv síly  $P_v$  (křivka WST\_ $P_v$ ) je nepatrný (pro krátké trhliny cca 1%, pro delší trhliny pak kolem 4%) ve srovnání s křivkou WST odpovídající výpočtu, kde je vertikální přitlačná síla  $P_v$  zanedbána.



Obr. 3. Závislost součinitele intenzity napětí, vyjádřeného pomocí  $B_1$ , na relativní délce trhliny  $\alpha$



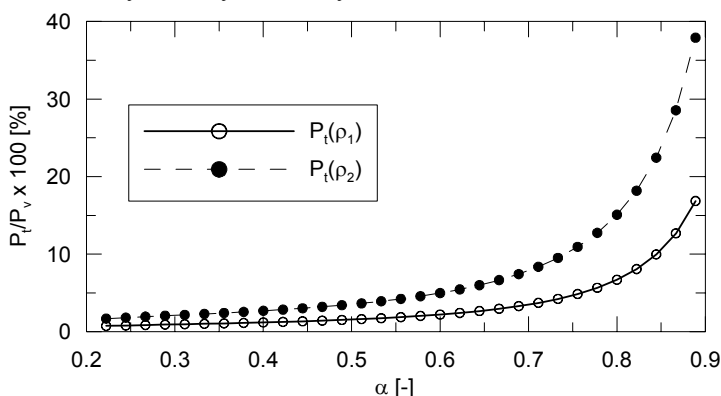
Obr. 4: Závislost  $T$ -napětí, vyjádřeného pomocí  $B_2$ , na relativní délce trhliny  $\alpha$

Na obr. 4. je již vidět podstatně větší rozdíl ve vynesných hodnotách  $B_2$ . Je tedy zřejmé, že vertikální tlačná síla má větší vliv na hodnotu druhého členu Williamsovy řady, viz rovnici (1).

Poznamenejme, předchozí presentované výsledky v obr. 3-4. jsou vyjádřeny bezrozměrné. V dalších analýzách jsou uvažovány pro dané objemové hmotnosti a konstantní hodnotu součinitele

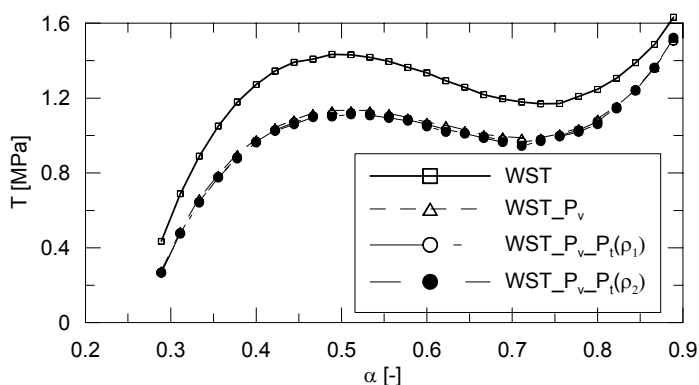
intenzity napětí  $K = 25 \text{ MPa mm}^{1/2}$ , a proto jsou výsledky uváděny v základních jednotkách zejména T-napětí v MPa.

Abychom mohli dobře kvantifikovat vliv vlastní tíhové síly, uvedeme zde poměr vertikální tlačné síly vnášené do tělesa zkušebními zařízeními k vlastní tíze vzorku. Tento poměr je pro jednotlivé uvažované objemové hmotnosti betonu uveden na obr. 5. Je vidět, že tento poměr těchto sil je u kratších trhlin zanedbatelný, řádově v procentech, zatímco s rostoucí relativní délkou trhliny  $\alpha$ , kde se projeví pokles vertikální tlačné síly v důsledku snižujícího se zatížení, viz rovnice (4), hodnota vlastní tíhy dosahuje až na třetiny hodnoty tlačné síly.



Obr. 5: Závislost poměru sil od vlastní tíhy tělesa  $P_t$  ( $\rho_1$  a  $\rho_2$ ) ku vertikální síle  $P_v$  na relativní délce trhliny.

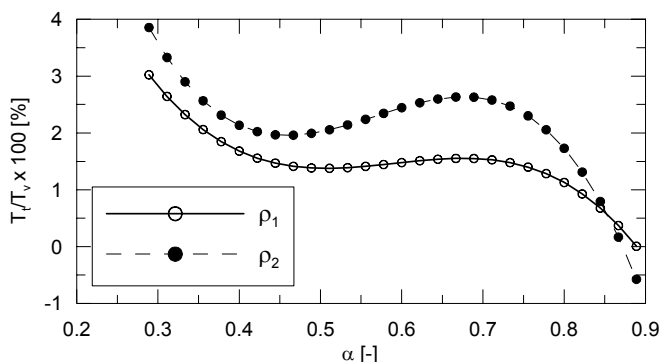
Vliv vlastní tíhy vzorku na úroveň constraintu je pak zachycen přes hodnotu T-napětí. Hodnoty  $B_2$  uvedené v grafu na obr. 4 přepočteme použitím rovnice (3) a získáme srovnávací křivku T-napětí, kterou pak porovnáme s hodnotami T-napětí pro dvě uvažované objemové hmotnosti cementového kompozitu. Na obr. 6. je uveden průběh T-napětí pro případ, kdy i) není uvažována vertikální složka vnášeného zatížení  $P_v$ , ii) uvažuje se  $P_v$  a iii) je uvažována vlastní tíha vzorku  $P_t$  pro objemovou hmotnost  $\rho_1$  a  $\rho_2$ . Z grafu je patrné, že trend křivky se s uvážením/změnou vlastní tíhy nemění.



Obr. 6: Průběh hodnoty T-napětí podél trhliny pro konstantní hodnotu  $K_{IC}$  podél relativní délky trhliny  $\alpha$ .

Relativní změna hodnoty T-napětí má s rostoucí objemovou hmotností materiálu klesající trend viz obr. 7. Pokles relativní hodnoty T-napětí se pohybuje v intervalu 0 až 4 procent, viz průběhy procentuálního podílu T-napětí vlastní tíhy tělesa ku T-napětí pouze od vertikální síly pro jednotlivé objemové hmotnosti materiálu.

Při experimentálních měření za použití WST se používá relativní délka zářezu  $\alpha$  v intervalu 0,3 a 0,8, kde se změna constraintu se pohybuje do 2 % pro lehké betony a do 3 % pro betony těžké.



Obr. 7: Změna hodnoty T-napětí v důsledku uvažování vlastní tíhy tělesa  $P_t$  ( $\rho_1$  a  $\rho_2$ ) podél relativní délky trhliny  $\alpha$ .

## 5 ZÁVĚR

V příspěvku je provedena numerická analýza WST vzorku používaná při experimentálním stanovování lomové mechanických parametrů zejména cementových kompozitů. Vyšetřoval se vliv vlastní tíhy tělesa na úroveň constraintu u vrcholu trhliny. Jako nástroj pro popis napjatosti v okolí vrcholu trhliny je použita dvouparametrová lomová mechanika. Ze studie plynou následující závěry:

- ✓ Vliv vlastní tíhy vzorku na hodnotu součinitele intenzity napětí je zcela zanedbatelný.
- ✓ Neuvážení vlastní tíhy vzorku při experimentálním zjišťování lomové mechanických veličin způsobí podcenění úrovně constraintu o max. 4 procenta u materiálů s velkou objemovou hmotností (velmi těžké betony), u běžných betonů půjde o podcenění okolo 2 procent.
- ✓ Tedy lze vyslovit doporučení, že při stanovování lomové mechanických parametrů betonových kompozitů lze tíhovou sílu od vlastní hmotnosti vzorku na rozdíl od vertikální tlačné síly zanedbat.

## PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky – registrační číslo projektu 101/08/1623 – a Grantové agentury Akademie věd České republiky – registrační číslo projektu KJB200410901.

## LITERATURA

- [1] ANSYS *Users manual version 10.0* Swanson Analysis System, Inc., Houston, 2005.
- [2] BRÜHWILER, E., WITTMANN, F.H. The wedge splitting test, a new method of performing stable fracture mechanics test, *Engineering Fracture Mechanics* 35 (1990) 117–125.
- [3] *Constraint effects in Fracture*, ASTM STP 1171, eds. E.M. Hackett et al. Philadelphia, ASTM 1993.
- [4] *Constraint effects in Fracture: Theory and Application* second volume, ASTM STP 1244, eds. M. Kirk and A. Bakker, 1995, ISBN 0-8031-2013-3.
- [5] GUINEA, G.V, ELICES, M., PLANAS, J. Stress intensity factors for wedge-splitting geometry, *International Journal of Fracture* 81 (1996), Pages 113–124.
- [6] KARIHALOO, B.L., XIAO, Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen, *International Journal of Fracture* 112 (2001) 129–137.

- [7] KNĚSL, Z. AND BEDNÁŘ, K. *Two parameter fracture mechanics: calculation of parameters and their values*, IPM of AS of Czech Republic, 1997.
- [8] LEEVERS, P.S. AND RADON, J.C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries, *International Journal of Fracture* 19 (1983) 311–325.
- [9] LINSBAUER, H.N., TSCHEGG, E.K. Fracture energy determination of concrete with cube-shaped specimens, *Zement und Beton* 31 (1986) 38–40.
- [10] LÖFGREN, I., STANG, H., OLESEN, J.F. Fracture properties of FRC determined through inverse analysis of wedge splitting and three-point bending tests, *Journal of Advanced Concrete Technology* 3, 423–434, 2005.
- [11] MURAKAMI, Y., et al. *Stress Intensity Factor Handbook* I, II, III, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [12] RILEM REPORT 5 *Fracture Mechanics Test Methods for Concrete*, Edited by S.P. Shah and A. Carpinteri and Hall, London, 1991.
- [13] SEITL, S., DYMÁČEK, P., KLUSÁK, J., ŘOUTIL, L., VESELÝ, V. Two-parameter fracture analysis of wedge splitting test specimen, *Proceedings of the 12<sup>th</sup> Int. Conf. on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, B.H.V. Topping, L.F. Costa Neves and R C. Barros (eds), Funchal, Civil-Comp Press, 2009a.
- [14] SEITL, S., KNĚSL, Z., VESELÝ, V., ŘOUTIL, L. A refined description of the crack tip stress field in wedge-splitting specimens – a two-parameter fracture mechanics approach, *Applied and Computational Mechanics* 3 (2009b) (in press).
- [15] SEITL, S. ŘOUTIL, L., VESELÝ, V. Numerical analysis of stress field for wedge splitting geometry, *Proceedings of Applied Mechanics 2009*, Smolenice 6.–9. 4. 2009, 270–278, 2009c.
- [16] SKOČEK, J. AND STANG, H. Inverse analysis of the wedge-splitting test, *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008) 3173–3188.
- [17] SLADEK J. AND SLADEK V. Evaluation of the elastic T-stress in three-dimensional crack problems using an integral formula, *International Journal of Fracture* 101 (2000), Pages L47–L52.
- [18] TADA H., PARIS P.C., IRWIN G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Third Edition, ASME, New York, 2000.
- [19] TAN, C. L., WANG, X. The use of quarter-point crack-tip elements for T-stress determination in boundary element method analysis. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003) 2247–2252.
- [20] WALTER R., ØSTERGAARD, R., OLESEN, J.F., STANG, H. Wedge splitting test for a steel–concrete interface, *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005) 2565–2583.
- [21] WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of stationary crack, *ASME Journal of Applied Mechanics* 24 (1957) 109–114.
- [22] XIAON, J., SCHNEIDER, H., DONNECKE, C., KONIG, G. Wedge splitting test on fracture of ultra high strength concrete, *Construction and Building Materials* 18 (2004) 359–365.
- [23] XU, S., BU, D., GAO, H., YIN, S., LIU, Y. Direct measurement of double-*K* fracture parameters and fracture energy using wedge-splitting test on compact tension specimens with different size, *proceedings of Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures – New Trends in Fracture*, Catania, Italy, 271–278, 2007.
- [24] YANG, B., RAVI-CHANDAR, K. Evaluation of elastic T-stress by the stress difference method, *Engineering Fracture Mechanics* 64 (1999) 589–605.

**Oponentní posudek vypracoval:**

Ing. Aleš Materna, Ph.D., Katedra materiálů FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2